ଏକାଦଶ ଅଧ୍ୟାୟ

ତ୍ରିକୋଣମିତି
(TRIGONOMETRY)

11.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ ଓ $\operatorname{cosec}\theta$ ର ସଂଜ୍ଞା, ଏହି ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ସୂତ୍ର ଏବଂ 30^0, 45^0 ଓ 60^0 ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କେତେକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତର ମୂଲ୍ୟ ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଥିଲା ।

ଏବେ 0^0 ଓ 90^0 କଥା ବିଚାରକୁ ନେବା । ଉଲ୍ଲେଖଯୋଗ୍ୟ ଯେ 0^0 ଏକ କୋଣ ପରିମାଣ ନୁହେଁ । ସେହିପରି 90^0 କ୍ଷେତ୍ରରେ ମଧ୍ୟ ସମକୋଣ ଗଠନ କରି p, b ଓ h ର ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଅନୁପାତ ମାଧ୍ୟମରେ $\sin\theta$, $\cos\theta$ ଆଦିର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।

ତେଣୁ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରଣୟନ କରାଗଲା ।

ସଂଜ୍ଞା : (1) $\sin 0^0 = 0$, $\cos 0^0 = 1$, $\tan 0^0 = \dfrac{\sin 0^0}{\cos 0^0} = 0$, $\sec 0^0 = \dfrac{1}{\cos 0^0} = 1$

$\dfrac{1}{0}$ ଅର୍ଥହୀନ ହୋଇଥିବାରୁ $\dfrac{\cos 0^0}{\sin 0^0}$ ଓ $\dfrac{1}{\sin 0^0}$ ଉଭୟ ଅର୍ଥହୀନ ।

ତେଣୁ $\cot 0^0$ ଓ $\operatorname{cosec} 0^0$ ସଂଜ୍ଞାଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ (undefined) ।

(2) $\sin 90^0 = 1$, $\cos 90^0 = 0$, $\cot 90^0 = \dfrac{\cos 90^0}{\sin 90^0} = 0$, $\operatorname{cosec} 90^0 = \dfrac{1}{\sin 90^0} = 1$

$\tan 90^0$ ଓ $\sec 90^0$ ସଂଜ୍ଞାଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ ।

$\sin\theta$, $\cos\theta$ ଆଦି ଛଅଗୋଟି ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତକୁ ବ୍ୟାପକ ଅର୍ଥରେ ତଥା ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ (Trigonometric functions) କୁହାଯାଏ । θ ହେଉଛି ଏକ ଚଳରାଶି (Variable ବା argument), ଅର୍ଥାତ୍ θ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ଗ୍ରହଣ କରିପାରେ । θ ପରିବର୍ତ୍ତେ ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରର ସଂକେତ ମଧ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ।

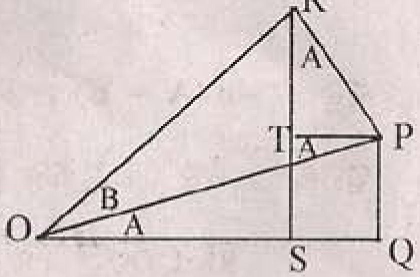
11.2 ଯୌଗିକ ଚଳ ଓ ତାହାର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ (Compound argument and its trigonometric functions) :

ଯଦି A ଓ B ଉଭୟ ଚଳରାଶି ଓ $\theta = A + B$ ବା $A - B$ ହୁଏ, ତେବେ θ ର ମୂଲ୍ୟ ଉଭୟ A ଓ B ଉପରେ ନିର୍ଭର କରିବ । A ଓ B ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ବା ଉଭୟ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେଲେ θ ମଧ୍ୟ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ଗ୍ରହଣ କରିପାରେ । ଏ ପରିସ୍ଥିତିରେ θ ଅର୍ଥାତ୍ $A + B$ ବା $A - B$ କୁ ଯୌଗିକ ଚଳ (Compound argument) କୁହାଯାଏ ।

ଯୌଗିକ ଚଳ ପାଇଁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବିଶେଷ ଧର୍ମ ରହିଛି । ସେଥି ମଧ୍ୟରୁ କେତେକ ପ୍ରମୁଖ ଧର୍ମକୁ ସୂତ୍ର ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ।

ସୂତ୍ର : $\sin(A + B) = \sin A.\cos B + \cos A.\sin B$ .... (1)

ପ୍ରମାଣ : ଚିତ୍ର 11.1 ରେ $\angle QOP$ ଓ $\angle POR$ ର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B, ତେଣୁ $\angle QOR$ ର ପରିମାଣ $A + B$ ଅଟେ ।



(ଚିତ୍ର 11.1)

$\overline{RS} \perp \overline{OQ}$, $\overline{RP} \perp \overline{OP}$ ଏବଂ $\overline{PT} \perp \overline{RS}$, $\overline{PQ} \perp \overline{OQ}$

ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ PQST ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ଅଟେ ।

ତେଣୁ $\overline{PT} \parallel \overline{OQ}$ ଏବଂ

$m\angle TPO = m\angle POQ = A$ (ଏକାନ୍ତର କୋଣ) .... (i)

RTP ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle PRT + m\angle TPR = 90^0$

$\overline{RP} \perp \overline{OP}$ ହେତୁ $m\angle TPO + m\angle TPR = 90^0$

$\therefore m\angle PRT + m\angle TPR = m\angle TPO + m\angle TPR$

ତେଣୁ $m\angle PRT = m\angle TPO = A$ [(i) ଅନୁଯାୟୀ] .... (ii)

$\therefore \sin(A + B) = \dfrac{RS}{OR} = \dfrac{RT + TS}{OR} = \dfrac{RT + PQ}{OR} = \dfrac{PQ}{OR} + \dfrac{RT}{OR}$ ($\because TS = PQ$)

$= \dfrac{PQ}{OP}.\dfrac{OP}{OR} + \dfrac{RT}{RP}.\dfrac{RP}{OR}$

$= \sin\angle QOP . \cos\angle POR + \cos\angle PRT . \sin\angle POR$

$= \sin A.\cos B + \cos A . \sin B$

[$\because m\angle QOP = A = m\angle PRT$ ...... (ii)] (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ : (i) $\sin A$ କୁ $\sin m\angle QOP$ ଅଥବା $\sin m\angle PRT$ ନ ଲେଖି $\sin \angle QOP$ ଅଥବା $\sin\angle PRT$ ଲେଖାଯାଏ । ସେହିପରି $\cos A$ କୁ $\cos m\angle QOP$ ଅଥବା $\cos m\angle PRT$ ନ ଲେଖି $\cos\angle QOP$ ଅଥବା $\cos\angle PRT$ ଲେଖାଯାଏ । ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ଏହି ପ୍ରଥା ଅନୁସୃତ ହୁଏ ।

(2) $\angle PRT$ ଓ $\angle QOP$ ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ହୋଇଥିବାରୁ ଆମେ PRT ବା QOP ଯେକୌଣସି ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରୁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା । ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ସଦୃଶ ହୋଇଥିବାରୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ଅଟନ୍ତି - ଏକଥା ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜ ପ୍ରସଙ୍ଗରେ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି ।

ସୂତ୍ର : $\cos(A+B) = \cos A . \cos B - \sin A . \sin B$ ..... (2)

ପ୍ରମାଣ : ଚିତ୍ର 11.1 ରୁ $\cos(A+B) = \frac{OS}{OR} = \frac{OQ-SQ}{OR} = \frac{OQ-TP}{OR}$

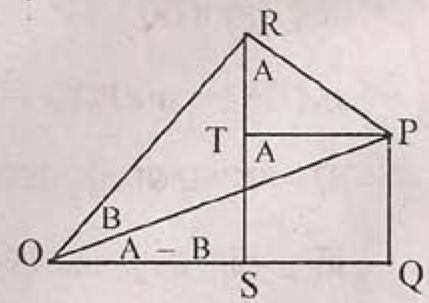
$$= \frac{OQ}{OR} - \frac{TP}{OR} = \frac{OQ}{OP}.\frac{OP}{OR} - \frac{TP}{RP}.\frac{RP}{OR}$$

$= \cos A . \cos B - \sin A . \sin B$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ସୂତ୍ର : $\sin(A-B) = \sin A . \cos B - \cos A . \sin B$ ....(3)

ପ୍ରମାଣ : ଚିତ୍ର 11.2 ରେ $m\angle QOR = A$, $m\angle POR = B$, ତେଣୁ $\angle QOP = A - B$

$\overline{RS} \perp \overline{OQ}$, $\overline{PR} \perp \overline{OR}$, $\overline{PT} \perp \overline{RS}$ ଓ $\overline{PQ} \perp \overline{OQ}$



(ଚିତ୍ର 11.2)

ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ PQST ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ।

ତେଣୁ $PQ = TS$ ଓ $SQ = TP$

$\angle ROS$ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle ROS + m\angle ORS = 90^0$

ପୁନଶ୍ଚ $\overline{PR} \perp \overline{OR}$ ହେତୁ $m\angle PRT + m\angle ORS = 90^0$

$\therefore m\angle ROS = m\angle PRT = A$ ($\because m\angle ROS = m\angle QOR = A$)

$\sin(A-B) = \sin\angle QOP = \frac{PQ}{OP} = \frac{TS}{OP}$ ($\because PQ = TS$)

$$= \frac{RS-RT}{OP} = \frac{RS}{OP} - \frac{RT}{OP} = \frac{RS}{OR}.\frac{OR}{OP} - \frac{RT}{RP}.\frac{RP}{OP}$$

$= \sin\angle ROS . \cos\angle POR - \cos\angle PRT . \sin\angle POR$

$= \sin A . \cos B - \cos A . \sin B$

($\because m\angle ROS = m\angle PRT = A$ ଓ $m\angle POR = B$) (ପ୍ରମାଣିତ)

ସୂତ୍ର : $\mathbf{\cos(A-B) = \cos A . \cos B + \sin A . \sin B}$ ....(4)

ପ୍ରମାଣ : ଚିତ୍ର 11.2 ରେ $\cos(A-B) = \cos\angle QOP$

$$= \frac{OQ}{OP} = \frac{OS+SQ}{OP} = \frac{OS+TP}{OP} (\because SQ = TP)$$

$$= \frac{OS}{OP} + \frac{TP}{OP} = \frac{OS}{OR}.\frac{OR}{OP} + \frac{TP}{RP}.\frac{RP}{OP}$$

$$= \cos\angle ROS \, . \, \cos\angle POR + \sin\angle PRT \, . \, \sin\angle POR$$

$$= \cos A \, . \cos B + \sin A \, . \sin B$$

$(\because m\angle ROS = m\angle PRT = A$ ଓ $m\angle POR = B)$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ସୂଚନା : ସୂତ୍ର -1ରୁ ସୂତ୍ର - 4 ଅତ୍ୟନ୍ତ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଓ ଏହାକୁ ସ୍ମରଣ ରଖିବା ବାଞ୍ଛନୀୟ; କାରଣ ଏହାପରେ ଆଲୋଚିତ ହେବାକୁ ଥିବା ବିଷୟବସ୍ତୁ ପାଇଁ ଏହି ଚାରିଗୋଟି ସୂତ୍ର ହିଁ ଆଧାର । ଏହି ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରମାଣ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ଆଧାରିତ ହୋଇଥିଲେ ହେଁ A ଓ B ର ଯେକୌଣସି ମାନ ପାଇଁ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ - ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଉଚ୍ଚତର ଶ୍ରେଣୀରେ ଦିଆଯିବ ।

ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ସାହାଯ୍ୟରେ $\tan(A \pm B)$ ଏବଂ $\cot(A \pm B)$ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ସୂତ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ।

(i) $\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin A.\cos B + \cos A.\sin B}{\cos A.\cos B - \sin A.\sin B}$

$$= \frac{\frac{\sin A.\cos B + \cos A.\sin B}{\cos A.\cos B}}{\frac{\cos A.\cos B - \sin A.\sin B}{\cos A.\cos B}}$$ (ଲବ ଓ ହରକୁ $\cos A . \cos B$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଗଲା)

$$= \frac{\frac{\sin A.\cos B}{\cos A.\cos B} + \frac{\cos A.\sin B}{\cos A.\cos B}}{\frac{\cos A.\cos B}{\cos A.\cos B} - \frac{\sin A.\sin B}{\cos A.\cos B}}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \, . \tan B}$$

$$\therefore \mathbf{\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \, . \, \tan B}}$$

(ii) $\tan(A-B) = \frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)} = \frac{\sin A.\cos B - \cos A.\sin B}{\cos A.\cos B + \sin A.\sin B}$

$$= \frac{\frac{\sin A.\cos B - \cos A.\sin B}{\cos A.\cos B}}{\frac{\cos A.\cos B + \sin A.\sin B}{\cos A.\cos B}}$$ (ଲବ ଓ ହରକୁ $\cos A . \cos B$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଗଲା)

$$= \frac{\frac{\sin A.\cos B}{\cos A.\cos B} - \frac{\cos A.\sin B}{\cos A.\cos B}}{\frac{\cos A.\cos B}{\cos A.\cos B} + \frac{\sin A.\sin B}{\cos A.\cos B}}$$

$$= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\ .\ \tan B}$$

$$\therefore \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\ .\ \tan B}$$

(iii) $\cot(A + B) = \frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)} = \frac{\cos A.\cos B - \sin A.\sin B}{\sin A.\cos B + \cos A.\sin B}$

$$= \frac{\frac{\cos A.\cos B - \sin A.\sin B}{\sin A.\sin B}}{\frac{\sin A.\cos B + \cos A.\sin B}{\sin A.\sin B}} = \frac{\frac{\cos A.\cos B}{\sin A.\sin B} - \frac{\sin A.\sin B}{\sin A.\sin B}}{\frac{\sin A.\cos B}{\sin A.\sin B} + \frac{\cos A.\sin B}{\sin A.\sin B}}$$

$$= \frac{\cot A.\cot B - 1}{\cot B + \cot A}$$

$$\therefore \cot(A + B) = \frac{\cot A.\cot B - 1}{\cot B + \cot A}$$

(iv) $\cot(A - B) = \frac{\cos(A-B)}{\sin(A-B)} = \frac{\cos A.\cos B + \sin A.\sin B}{\sin A.\cos B - \cos A.\sin B}$

$$= \frac{\frac{\cos A.\cos B + \sin A.\sin B}{\sin A.\sin B}}{\frac{\sin A.\cos B - \cos A.\sin B}{\sin A.\sin B}} = \frac{\frac{\cos A.\cos B}{\sin A.\sin B} + \frac{\sin A.\sin B}{\sin A.\sin B}}{\frac{\sin A.\cos B}{\sin A.\sin B} - \frac{\cos A.\sin B}{\sin A.\sin B}}$$

$$= \frac{\cot A.\cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

$$\therefore \cot(A - B) = \frac{\cot A.\cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

ଆଲୋଚିତ୍ର ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ନିମ୍ନ ଉପ-ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ନିଜେ ସ୍ଥିର କର ।

(a) $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\ .\ \cos B$

(b) $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\ .\ \sin B$

(c) $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A\ .\ \cos B$

(d) $\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A\ .\ \sin B$

ଉଦାହରଣ– 1 : ପ୍ରମାଣ କର : $\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A.\cos B} = \tan A - \tan B$

ସମାଧାନ : ବାମପକ୍ଷ = $\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A.\cos B} = \dfrac{\sin A.\cos B - \cos A.\sin B}{\cos A.\cos B}$

$= \dfrac{\sin A.\cos B}{\cos A.\cos B} - \dfrac{\cos A.\sin B}{\cos A.\cos B} = \tan A - \tan B =$ ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ– 2 : ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\tan 7\theta - \tan 5\theta - \tan 2\theta = \tan 7\theta . \tan 5\theta . \tan 2\theta$

ସମାଧାନ : $7\theta = 5\theta + 2\theta \Rightarrow \tan 7\theta = \tan(5\theta + 2\theta)$

$\Rightarrow \tan 7\theta = \dfrac{\tan 5\theta + \tan 2\theta}{1 - \tan 5\theta . \tan 2\theta}$

$\Rightarrow \tan 7\theta (1 - \tan 5\theta . \tan 2\theta) = \tan 5\theta + \tan 2\theta$

$\Rightarrow \tan 7\theta - \tan 7\theta . \tan 5\theta . \tan 2\theta = \tan 5\theta + \tan 2\theta$

$\Rightarrow \tan 7\theta - \tan 5\theta - \tan 2\theta = \tan 7\theta . \tan 5\theta . \tan 2\theta$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ– 3 : ପ୍ରମାଣ କର : $\dfrac{\cos 17^0 + \sin 17^0}{\cos 17^0 - \sin 17^0} = \tan 62^0$

ସମାଧାନ : ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ $= \tan 62^0 = \tan(45^0 + 17^0) = \dfrac{\tan 45^0 + \tan 17^0}{1 - \tan 45^0 . \tan 17^0}$

$= \dfrac{1 + \tan 17^0}{1 - \tan 17^0}$ $\quad (\because \tan 45^0 = 1)$

$= \dfrac{1 + \dfrac{\sin 17^0}{\cos 17^0}}{1 - \dfrac{\sin 17^0}{\cos 17^0}} = \dfrac{\dfrac{\cos 17^0 + \sin 17^0}{\cos 17^0}}{\dfrac{\cos 17^0 - \sin 17^0}{\cos 17^0}} = \dfrac{\cos 17^0 + \sin 17^0}{\cos 17^0 - \sin 17^0} =$ ବାମପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ– 4 : $\sin 15^0$ ଓ $\cos 75^0$ ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : $\sin 15^0 = \sin(45^0 - 30^0) = \sin 45^0 . \cos 30^0 - \cos 45^0 . \sin 30^0$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} . \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} . \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$[\because \sin 45^0 = \cos 45^0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sin 30^0 = \dfrac{1}{2}, \cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}]$

$\cos 75^0 = \cos(45^0 + 30^0) = \cos 45^0 . \cos 30^0 - \sin 45^0 . \sin 30^0$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} . \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} . \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ– **5 :** $\sin A = \frac{3}{5}$ ଏବଂ $\cos B = \frac{5}{13}$ ହେଲେ $\sin(A+B)$ ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : $\sin A = \frac{3}{5}$ $\therefore \cos A = \sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

ପୁନଶ୍ଚ $\cos B = \frac{5}{13}$ $\therefore \sin B = \sqrt{1-\cos^2 B} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

$\therefore \sin(A+B) = \sin A \,.\, \cos B + \cos A \,.\, \sin B = \frac{3}{5}.\frac{5}{13} + \frac{4}{5}.\frac{12}{13} = \frac{15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{63}{65}$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 11 (a)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $\sin(A+B) = \frac{\sin A}{-----} + \frac{\cos A}{-----}$ (ii) $\cos(A+B) = \frac{\cos A}{-----} - \frac{\sin A}{-----}$

(iii) $\sin(30^0 + A) + \sin(30^0 - A) =$ ------ (iv) $\cos(45^0 - A) - \cos(45^0 + A) =$ ----

(v) $\sin(\alpha+\beta) -$ ----- $= 2\cos\alpha \,.\, \sin\beta$ (vi) -------- $+ \cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha \,.\, \cos\beta$

(vii) $2\sin A \,.\, \sin B =$ ------- $- \cos(A+B)$

2. ପ୍ରମାଣ କର ।

(i) $\frac{\sin(A+B)}{\cos A.\cos B} = \tan A + \tan B$ (ii) $\frac{\cos(A-B)}{\cos A.\sin B} = \cot B + \tan A$

(iii) $\frac{\cos(A+B)}{\cos A.\cos B} = 1 - \tan A \,.\, \tan B$ (iv) $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta.\cos\beta}$

(v) $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\beta.\cos\beta}$

3. ପ୍ରମାଣ କର ।

(i) $\cos(A+45^0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A - \sin A)$

(ii) $\sin(45^0 - \theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta - \cos\theta)$

(iii) $\tan(45^0 + \theta) = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

(iv) $\sin(40^0 + A) \,.\, \cos(20^0 - A) + \cos(40^0 + A) \,.\, \sin(20^0 - A) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(v) $\cos(48^0 + \theta) \,.\, \cos(12^0 - \theta) - \sin(48^0 + \theta) \,.\, \sin(12^0 - \theta) = \frac{1}{2}$

(vi) $\tan(60^0 - A) = \dfrac{\sqrt{3}\cos A - \sin A}{\cos A + \sqrt{3}\sin A}$

(vii) $\cot(A - 30^0) = \dfrac{\sqrt{3}\cos A + \sin A}{\sqrt{3}\sin A - \cos A}$

4. ପ୍ରମାଣ କର ।

(i) $\dfrac{\cos(A+B)}{\sin A.\cos B} + \dfrac{\cos(A-B)}{\sin A.\cos B} = 2\cot A$

(ii) $\cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = (\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\beta - \sin\beta)$

(iii) $\tan 7A . \tan 4A . \tan 3A = \tan 7A - \tan 4A - \tan 3A$

(iv) $\tan(x+y) - \tan x - \tan y = \tan(x+y) . \tan x . \tan y$

(v) $\tan(45^0+\theta) \times \tan(45^0-\theta) = 1$

5. ପ୍ରମାଣ କର ।

(i) $\dfrac{\cos 16^0 + \sin 16^0}{\cos 16^0 - \sin 16^0} = \tan 61^0$ (ii) $\dfrac{\cos 35^0 - \sin 35^0}{\cos 35^0 + \sin 35^0} = \tan 10^0$

(iii) $(1+\tan 15^0)(1+\tan 30^0) = 2$ (iv) $(\cot 10^0 - 1)(\cot 35^0 - 1) = 2$

(v) $\dfrac{1}{\cot A + \tan B} - \dfrac{1}{\tan A + \cot B} = \tan(A-B)$

6. $\cos 15^0$ ଏବଂ $\sin 75^0$ ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

7. (i) $\sin A = \dfrac{9}{41}$ ଏବଂ $\cos B = \dfrac{8}{17}$ ହେଲେ $\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$ ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(ii) $\sin\alpha = \dfrac{7}{25}$, $\sin\beta = \dfrac{5}{13}$, ହେଲେ $\sin(\alpha-\beta)$ ଏବଂ $\cos(\alpha-\beta)$ ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

8. $\tan(A+B)$ ର ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗରେ $\tan(A+B+C)$ ର ସୂତ୍ର ନିରୂପଣ କର ।

9. $\sin(A+B)$ ଓ $\cos(A+B)$ ର ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକରେ $A = B$ ନେଇ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\sin 2A = 2\sin A . \cos A$ ଏବଂ $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

10. (i) $\tan A = \dfrac{1}{2}$, $\cot B = 3$ ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ $A + B = 45^0$

(ii) $\tan\beta = \dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$ ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\tan(\alpha+\beta) = 1$

11. ପ୍ରମାଣ କର ।

(i) $\sin 50^0 + \sin 40^0 = \sqrt{2}\sin 85^0$

(ii) $\cos 70^0 + \cos 50^0 = \sin 80^0$

11.3 $0^0 \le \theta \le 90^0$ ପାଇଁ ଛଅଗୋଟି ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ଯଥା $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta$ ଓ $\operatorname{cosec}\theta$ ର ଅବତାରଣା କରାଯାଇଛି । ବର୍ତ୍ତମାନ $0^0 \le \theta \le 180^0$ ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ ।

ପୂର୍ବରୁ 0^0 ଓ 90^0 ପାଇଁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ $\sin 0^0, \cos 0^0, \sin 90^0, \cos 90^0$ ଇତ୍ୟାଦିର ମୂଲ୍ୟ ସଂଜ୍ଞା ରୂପେ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଇଛି । ଏଠାରେ ଉଲ୍ଲେଖଯୋଗ୍ୟ ଯେ, ପୂର୍ବ ଆଲୋଚିତ $\sin(A \pm B)$ ଓ $\cos(A \pm B)$ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ $\sin 0^0 = 0$, $\cos 0^0 = 1$, $\sin 90^0 = 1$, $\cos 90^0 = 0$ ଇତ୍ୟାଦି ପାଇପାରିବା । $\sin 0^0$, $\cos 0^0$ ଇତ୍ୟାଦିର ମୂଲ୍ୟ ପୂର୍ବେ ପ୍ରଦତ୍ତ ସଂଜ୍ଞାଗୁଡ଼ିକ ଯଥାର୍ଥ; ଏହା ଦର୍ଶାଇବା ଆମର ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ । ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ଉଲ୍ଲେଖଯୋଗ୍ୟ ଯେ $\sin 180^0$, $\cos 180^0$ର ମୂଲ୍ୟ $\sin(A + B)$ ଓ $\cos(A + B)$ ର ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ । ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖ ।

ଉଦାହରଣ – 6: ନିମ୍ନଲିଖିତ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

(a) $\sin 0^0, \cos 0^0$ (b) $\sin 90^0, \cos 90^0$ (c) $\sin 180^0, \cos 180^0$

ସମାଧାନ :

(a) $\sin(A-B)$ ଓ $\cos(A-B)$ ରେ $A = B = 45^0$ (ମନେକର) ନେଲେ

$$\sin 0^0 = \sin(45^0 - 45^0) = \sin 45^0 . \cos 45^0 - \cos 45^0 . \sin 45^0 = 0$$

$$\cos 0^0 = \cos(45^0 - 45^0) = \cos 45^0 . \cos 45^0 + \sin 45^0 . \sin 45^0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$\therefore$ $\boxed{\sin 0^0 = 0 \text{ ଓ } \cos 0^0 = 1}$

ସୂଚନା : (I) $\tan 0^0 = \frac{0}{1} = 0$ ମାତ୍ର $\cot 0^0$ ଅର୍ଥହୀନ କାରଣ ଭାଜକ ଶୂନ ହେବା ଅସମ୍ଭବ ।

ସେହିପରି $\operatorname{cosec} 0^0$ ନିରର୍ଥକ (ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ) ମାତ୍ର $\sec 0^0 = \frac{1}{\cos 0^0} = \frac{1}{1} = 1$

(b) $\sin(A+B)$ ଓ $\cos(A+B)$ ସୂତ୍ର ଦ୍ୱୟରେ $A = B = 45^0$ ଲେଖିଲେ

$$\sin 90^0 = \sin(45^0 + 45^0) = \sin 45^0 \times \cos 45^0 + \cos 45^0 \times \sin 45^0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\cos 90^0 = \cos(45^0 + 45^0) = \cos 45^0 \times \cos 45^0 - \sin 45^0 \times \sin 45^0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$\therefore$ $\boxed{\sin 90^0 = 1 \text{ ଓ } \cos 90^0 = 0}$

ସୂଚନା (II) : $\cot 90^0 = 0$, $\text{cosec}\ 90^0 = 1$ ମାତ୍ର $\sec 90^0$ ଓ $\tan 90^0$ ନିରର୍ଥକ ଅର୍ଥାତ୍ ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ ।

ସୂଚନା (III) : (a) ର ଉତ୍ତର ପାଇଁ $30^0 - 30^0$ କିମ୍ବା $60^0 - 60^0$ ଓ (b) ର ଉତ୍ତର ପାଇଁ $30^0 + 60^0$ ଲେଖିଥିଲେ ମଧ୍ୟ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ଉତ୍ତର ମିଳିବ ।

(c) $\sin(A+B)$ ଓ $\cos(A+B)$ ସୂତ୍ରରେ $A = B = 90^0$ ଲେଖିଲେ

$\sin 180^0 = \sin(90^0 + 90^0) = \sin 90^0 . \cos 90^0 + \cos 90^0 . \sin 90^0$

$\sin 180^0 = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$

$\cos 180^0 = \cos(90^0 + 90^0) = \cos 90^0 . \cos 90^0 - \sin 90^0 . \sin 90^0$

$= 1 \times 0 - 1 \times 1 = -1$

$\therefore$ $\boxed{\sin 180^0 = 0 \text{ ଏବଂ } \cos 180^0 = -1}$

ସୂଚନା (IV) : $\tan 180^0 = 0$, $\sec 180^0 = -1$ ମାତ୍ର $\cot 180^0$ ଏବଂ $\text{cosec}\ 180^0$ ନିରର୍ଥକ ଅଟନ୍ତି ।

ମନେରଖ : ସାରଣୀ - 11.1

θ^0	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\text{cosec}\,\theta$
0^0	0	1	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	1	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ
90^0	1	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	0
180^0	0	−1	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	−1	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ

11.4 $90^0 \pm A$ ଓ $180^0 - A$ କୋଣମାନଙ୍କ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ :

$90^0 - A$, $90^0 + A$ ଓ $180^0 - A$ କୋଣଗୁଡ଼ିକ 0^0 ରୁ 180^0 ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଅଟେ । ଏହି କୋଣମାନଙ୍କ ପାଇଁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ $\sin(90^0 \pm A)$, $\cos(90^0 \pm A)$ ଓ $\sin(180^0 - A)$, $\cos(180^0 - A)$ ମାନଙ୍କ ସୂତ୍ର ଗୁଡ଼ିକ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା । $\sin(A \pm B)$ ଓ $\cos(A \pm B)$ ସୂତ୍ରମାନଙ୍କର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଏ ସମସ୍ତ ସୂତ୍ରକୁ ସାବ୍ୟସ୍ତ କରାଯାଇପାରିବ ।

(a) $\sin(90^0 - A) = \cos A$, $\cos(90^0 - A) = \sin A$, $\tan(90^0 - A) = \cot A$

(b) $\sin(90^0 + A) = \cos A$, $\cos(90^0 + A) = -\sin A$, $\tan(90^0 + A) = -\cot A$

(c) $\sin(180^0 - A) = \sin A$, $\cos(180^0 - A) = -\cos A$, $\tan(180^0 - A) = -\tan A$

ପ୍ରମାଣ : (a) $\sin(90^0 - A) = \sin 90^0 . \cos A - \cos 90^0 . \sin A$ [$\sin(A-B)$ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି]

$= 1 \times \cos A - 0 \times \sin A$ [$\because \sin 90^0 = 1$ ଏବଂ $\cos 90^0 = 0$]

$= \cos A$

ପୁନଶ୍ଚ $\cos(90^0 - A) = \cos 90^0 . \cos A + \sin 90^0 . \sin A$ [$\cos(A - B)$ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି]

$= 0 \times \cos A + 1 \times \sin A = \sin A$;

ଓ $\tan(90 - A) = \dfrac{\sin(90^0 - A)}{\cos(90^0 - A)} = \dfrac{\cos A}{\sin A} = \cot A$ [ଯଦି $\sin A \neq 0$]

(b) $\sin(90^0 + A) = \sin 90^0 . \cos A + \cos 90^0 . \sin A$ [$\sin(A+B)$ ସୂତ୍ର]

$= 1 \times \cos A + 0 \times \sin A = \cos A$;

ପୁନଶ୍ଚ $\cos(90^0 + A) = \cos 90^0 . \cos A - \sin 90^0 . \sin A$ [$\cos(A+B)$ ସୂତ୍ର]
$= 0 \times \cos A - 1 \times \sin A = -\sin A$;

ଓ $\tan(90^0 + A) = \dfrac{\sin(90^0 + A)}{\cos(90^0 + A)} = \dfrac{\cos A}{-\sin A} = -\cot A$

ଯଦି $\sin A \neq 0$ । ଅର୍ଥାତ୍ $A \neq 0^0$

(c) $\sin(180^0 - A) = \sin 180^0 . \cos A - \cos 180^0 . \sin A$ [$\sin(A-B)$ ସୂତ୍ର]
$= 0 \times \cos A - (-1) \times \sin A$ [$\because \sin 180^0 = 0$ ଓ $\cos 180^0 = -1$]
$= \sin A$

$\cos(180^0 - A) = \cos 180^0 . \cos A + \sin 180^0 . \sin A$ [$\cos(A-B)$ ସୂତ୍ର]
$= (-1) \times \cos A + 0 \times \sin A = -\cos A$;

$\tan(180^0 - A) = \dfrac{\sin(180^0 - A)}{\cos(180^0 - A)} = \dfrac{\sin A}{-\cos A} = -\tan A$

ଯଦି $\cos A \neq 0$ । ଅର୍ଥାତ୍ $A \neq 90^0$

$\boxed{\text{ସୂତ୍ର - A}}$

$0^0 < 90^0$ ପରିସରରେ ନିମ୍ନ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ମନେରଖ ।

$\sin(90^0 - \theta) = \cos\theta$, $\quad \cos(90^0 - \theta) = \sin\theta$

$\tan(90^0 - \theta) = \cot\theta$, $\quad \cot(90^0 - \theta) = \tan\theta$

$\sec(90^0 - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$, $\quad \operatorname{cosec}(90^0 - \theta) = \sec\theta$

$\boxed{\text{ସୂତ୍ର - B}}$

$$\left.\begin{array}{l} \sin(180^0 - \theta) = \sin\theta \\ \cos(180^0 - \theta) = -\cos\theta \\ \tan(180^0 - \theta) = -\tan\theta,\ \theta \neq 90^0 \end{array}\right\} \quad 0^0 \leq \theta \leq 180^0$$

$\cot(180^0 - \theta) = -\cot\theta \qquad 0^0 < \theta < 180^0$

$\sec(180^0 - \theta) = -\sec\theta \qquad \theta \neq 90^0, 0^0 \leq \theta \leq 180^0$

$\operatorname{cosec}(180^0 - \theta) = \operatorname{cosec}\theta, \quad 0^0 < \theta < 180^0$

$\boxed{\text{ସୂତ୍ର - C}}$

$\sin(90^0 + \theta) = \cos\theta \qquad 0^0 \leq \theta \leq 90^0$

$\cos(90^0 + \theta) = -\sin\theta \qquad 0^0 \leq \theta \leq 90^0$

$\tan(90^0 + \theta) = -\cot\theta \qquad 0^0 < \theta \leq 90^0$

$\cot(90^0 + \theta) = -\tan\theta \qquad 0^0 \leq \theta < 90^0$

$\sec(90^0 + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta \qquad 0^0 < \theta \leq 90^0$

$\operatorname{cosec}(90^0 + \theta) = \sec\theta \qquad 0^0 \leq \theta < 90^0$

11.5 କେତେକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ମାନ :

$\theta = 30^0, 45^0, 60^0$ ପାଇଁ ବିଭିନ୍ନ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ମାନ ନିରୂପଣ କରାଯାଇଥିଲା । ଏମାନଙ୍କ ସାହାଯ୍ୟରେ ଏବଂ ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ ତଥ୍ୟମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା $\theta = 120^0$, 135^0 ଓ 150^0 ପାଇଁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ମାନ ସବୁ ମଧ୍ୟ ନିରୂପିତ ହୋଇପାରିବ । ଏହାର ଆଲୋଚନା ନିମ୍ନରେ କରାଯାଇଛି ।

(i) $\boldsymbol{\theta = 120^0}$

ପୂର୍ବରୁ ଜଣା ଅଛି ଯେ $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ ଏବଂ $\tan 60^0 = \sqrt{3}$

$\therefore \sin 120^0 = \sin(180^0 - 60^0) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120^0 = \cos(180^0 - 60^0) = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$

$\tan 120^0 = \tan(180^0 - 60^0) = -\tan 60^0 = -\sqrt{3}$

$\cot 120^0 = \frac{1}{\tan 120^0} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sec 120^0 = \frac{1}{\cos 120^0} = -2$ ଏବଂ

$\operatorname{cosec} 120^0 = \frac{1}{\sin 120^0} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(i) $\boldsymbol{\theta = 135^0}$

ଏଠାରେ $\theta = 180^0 - 45^0$ ଏବଂ ପୂର୍ବରୁ ଜଣା ଅଛି ଯେ -

$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45^0 = 1$

$\therefore \sin 135^0 = \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 135^0 = -\cos 45^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$\tan 135^0 = -\tan 45^0 = -1$

[$\sin(180^0 - \theta)$, $\cos(180^0 - \theta)$, $\tan(180^0 - \theta)$ ର ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି]

$\cot 135^0 = \frac{1}{\tan 135^0} = -1$; $\sec 135^0 = \frac{1}{\cos 135^0} = -\sqrt{2}$

ଏବଂ $\operatorname{cosec} 135^0 = \frac{1}{\sin 135^0} = \sqrt{2}$

(iii) ପୂର୍ବରୁ ଜଣା ଅଛି $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \sin 150^0 = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\cos 150^0 = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150^0 = -\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cot 150^0 = \frac{1}{\tan 150^0} = -\sqrt{3}$

$\sec 150^0 = \frac{1}{\cos 150^0} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ ଏବଂ $\operatorname{cosec} 150^0 = \frac{1}{\sin 150^0} = 2$

ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଜଣା ଥିବା ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ମାନଗୁଡ଼ିକୁ ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀରେ ଉପସ୍ଥାପିତ କରାଯାଇଛି ।

ସାରଣୀ 11.2

$\theta =$	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
0^0	0	1	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	1	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90^0	1	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	1
120^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
135^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150^0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
180^0	0	-1	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	-1	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ

ଉଦାହରଣ – 6 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\sin 120^0 + \tan 150^0 . \cos 135^0 = \frac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

ସମାଧାନ : ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \sin 120^0 + \tan 150^0 . \cos 135^0$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} =$$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ – 7 : ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\frac{\cos 29^0 + \sin 159^0}{\sin 61^0 + \cos 69^0}$

ସମାଧାନ : $\frac{\cos 29^0 + \sin 159^0}{\sin 61^0 + \cos 69^0} = \frac{\cos(90^0 - 61^0) + \sin(90^0 + 69^0)}{\sin 61^0 + \cos 69^0} = \frac{\sin 61^0 + \cos 69^0}{\sin 61^0 + \cos 69^0} = 1$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – **8** : ସରଳ କର : $\dfrac{\cos(90^0-A).\sec(180^0-A).\sin(180^0-A)}{\sin(90^0+A).\tan(90^0+A).\operatorname{cosec}(90^0+A)}$

ସମାଧାନ : $\dfrac{\cos(90^0-A).\sec(180^0-A).\sin(180^0-A)}{\sin(90^0+A).\tan(90^0+A).\operatorname{cosec}(90^0+A)}$

$$= \frac{\sin A.(-\sec A).\sin A}{\cos A.(-\cot A).\sec A} = \frac{\sin^2 A}{\cos A.\ \cot A} = \frac{\sin^2 A}{\cos A.\dfrac{\cos A}{\sin A}} = \frac{\sin^3 A}{\cos^2 A}$$

ଉଦାହରଣ – **9** : Δ ABC ରେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ,

$\cos(A+B)+\sin C=\sin(A+B)-\cos C$

ସମାଧାନ : Δ ABC ରେ $A+B+C=180^0$

$\Rightarrow A+B=180^0-C \Rightarrow \cos(A+B)=\cos(180^0-C)$

$\Rightarrow \cos(A+B)=-\cos C$ ..... (i)

ପୁନଶ୍ଚ $A+B=180^0-C \Rightarrow \sin(A+B)=\sin(180^0-C)$

$\Rightarrow \sin(A+B)=\sin C$

$\Rightarrow \sin C=\sin(A+B)$ ..... (ii)

(i) ଓ (ii) ରୁ $\cos(A+B)+\sin C=\sin(A+B)-\cos C$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ – **10** : $A+B+C=90^0$ ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ,

$\tan A.\tan B+\tan B.\tan C+\tan C.\tan A=1$

ସମାଧାନ : $A+B+C=90^0 \Rightarrow A+B=90^0-C$

$\Rightarrow \tan(A+B)=\tan(90^0-C)$

$\Rightarrow \dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}=\cot C$

$\Rightarrow \dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}=\dfrac{1}{\tan C}$

$\Rightarrow \tan C(\tan A+\tan B)=1-\tan A.\tan B$

$\Rightarrow \tan A.\tan C+\tan B.\tan C=1-\tan A.\tan B$

$\Rightarrow \tan A.\tan B+\tan B.\tan C+\tan C.\tan A=1$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ – **11** : ସମାଧାନ କର : $\tan(A+B)=-1$, $\sec(A-B)=\sqrt{2}$

ସମାଧାନ : $\tan(A+B)=-1 \Rightarrow \tan(A+B)=\tan 135^0$

$\Rightarrow A+B=135^0$ ..... (i)

ପୁନଶ୍ଚ $\sec(A-B)=\sqrt{2} \Rightarrow \sec(A-B)=\sec 45^0$

$\Rightarrow A-B=45^0$ .... (ii)

(i) ଓ (ii) କୁ ଯୋଗ କଲେ ପାଇବା,

$2A=180^0 \Rightarrow A=90^0$

$\therefore$ B = $135^0 - 90^0 = 45^0$

$\therefore$ A = 90^0 ଓ B = 45^0 (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – **12 :** ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\cos^2 135^0 - 2\sin^2 180^0 + 3\cot^2 150^0 - 4\tan^2 120^0 = \frac{-5}{2}$

ସମାଧାନ : ବାମପକ୍ଷ $= \cos^2 135^0 - 2\sin^2 180^0 + 3\cot^2 150^0 - 4\tan^2 120^0$

$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2.(0)^2 + 3.(-\sqrt{3})^2 - 4(-\sqrt{3})^2$

$= \frac{1}{2} - 0 + 3 \times 3 - 4 \times 3$

$= \frac{1}{2} + 9 - 12 = \frac{1}{2} - 3 = \frac{-5}{2}$ = ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 11 (b)

1. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(a) $\sin 80^0 =$ .... $[\sin 10^0, \sin 20^0, \cos 10^0, \cos 20^0]$

(b) $\cos 65^0 =$ .... $[\sin 25^0, \sin 35^0, \cos 25^0, \cos 35^0]$

(c) $\sin 180^0 =$ .... $[1, -1, 0, \pm 1]$

(d) $\cos 90^0 =$ .... $[1, -1, 0, \pm 1]$

(e) $\cos 110^0 + \sin 20^0 =$ .... $[2\cos 110^0, 2\sin 20^0, 0, 1]$

(f) $\sin 75^0 - \cos 15^0 =$ .... $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1]$

(g) $\sin 0^0 =$ .... $[\cos 0^0, \sin 90^0, \sin 180^0, \cos 180^0]$

(h) $\sin 15^0 + \cos 105^0 =$ .... $[0, 1, -1, \pm 1]$

(i) $\cos 121^0 + \sin 149^0 =$ .... $[1, -1, 0, \pm 1]$

(j) $\tan 102^0 - \cot 168^0 =$ .... $[0, -1, 1, \pm 1]$

2. ସରଳ କର ।

(i) $\sin^2(180^0 - \theta) \times \sec^2(90^0 + \theta)$

(ii) $\sin^2 165^0 \times \sec^2 105^0$

(iii) $\cot 112^0 . \cot 158^0$

(iv) $\tan 50^0 . \tan 40^0$

(v) $\cos^2(90^0 + \alpha) + \cos^2(180^0 - \alpha)$

(vi) $\sec^2(180^0 - \theta) - \cot^2(90^0 + \theta)$

(vii) $\sec^2(90^0 + \theta) - \cot^2(180^0 - \theta)$

(viii) $\mathrm{cosec}^2(97^0 + \alpha) - \cot^2(83^0 - \alpha)$

(ix) $\sec^2(105^0 + \alpha) - \tan^2(75^0 - \alpha)$

(x) $\sin^2(110^0 + \alpha) + \cos^2(70^0 - \alpha)$

3. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $\sin 28^0 + \cos 118^0$ (ii) $\dfrac{\tan^2 60^0}{\text{cosec}150^0}$

(iii) $\dfrac{\sin51^0 + \sin156^0}{\cos39^0 + \cos66^0}$ (iv) $\sin^2 70^0 + \cos^2 110^0$

(v) $\dfrac{\cos68^0 + \sin131^0}{\sin22^0 + \cos41^0}$ (vi) $\dfrac{\sin162^0 + \cos153^0}{\cos72^0 - \cos27^0}$

4. ସରଳ କର ।

(i) $\dfrac{\sec 31^0 + \text{cosec } 120^0}{\sqrt{3}\,\text{cosec } 29^0 + 2}$ (ii) $\dfrac{\sec 62^0 + \text{cosec } 150^0}{\text{cosec } 28^0 + 2}$

(iii) $\dfrac{\sin^2 125^0 + \cos^2 55^0}{\cos^2 125^0 + \sin^2 55^0}$ (iv) $\dfrac{\sec^2 180^0 + \tan 150^0}{\text{cosec}^2 90^0 + \cot 120^0}$

(v) $\dfrac{\text{cosec } 38^0 + \sin 120^0}{2\sin52^0 + \sqrt{3}}$ (vi) $\tan 180^0 . \tan 135^0 . \tan 150^0 . \tan 45^0$

5. ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

(a) $\tan 1^0 \times \tan 2^0 \times \tan 3^0 \times ... \times \tan 88^0 \times \tan 89^0$

(b) $\tan 10^0 \times \tan 20^0 \times \tan 30^0 \times ... \times \tan 70^0 \times \tan 80^0$

6. (i) $A + B + C = 180^0$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A . \tan B . \tan C$

(ii) $A + B + C = 180^0$ ଏବଂ $\sin C = 1$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\tan A . \tan B = 1$

(iii) $A + B + C = 180^0$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

$\cot A . \cot B + \cot B . \cot C + \cot C . \cot A = 1$

(iv) $A + B + C = 180^0$ ଏବଂ $\cos A = \cos B . \cos C$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

(a) $\tan A = \tan B + \tan C$; (b) $\tan B . \tan C = 2$

7. ସମାଧାନ କର :

(i) $\sin (A + B) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \cos (A - B) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\cos (A + B) = -\dfrac{1}{2}, \sin (A - B) = \dfrac{1}{2}$

(iii) $\tan (A - B) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \cot (A + B)$ (iv) $\tan (A + B) = -1, \text{cosec}(A - B) = \sqrt{2}$

8. ଦର୍ଶାଅ ଯେ,

(i) $\sin (A + B) \times \sin (A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

(ii) $\cos (A + B) \times \cos (A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B$

9. ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\dfrac{\sin^2 135^0 + \cos^2 120^0 - \sin^2 150^0 + \tan^2 150^0}{\sin^2 120^0 + \cos^2 150^0 + \tan^2 120^0 + \tan 135^0 + \cos 180^0} = \dfrac{5}{18}$

(ii) $\dfrac{\sec^2 180^0 + \tan 45^0}{\operatorname{cosec}^2 90^0 - \cot 120^0} = 3 - \sqrt{3}$

(iii) $\dfrac{\cot 60^0 . \cot 30^0 + 1}{\cot 30^0 + \cot 120^0} = \sqrt{3}$

(iv) $\dfrac{\tan 45^0 + \tan 30^0}{1 - \tan 45^0 . \tan 30^0} = 2 + \sqrt{3}$

(v) $\dfrac{5\sin^2 150^0 + \cos^2 45^0 + 4\tan^2 120^0}{2\sin 30^0 . \cos 60^0 - \tan 135^0} = \dfrac{55}{6}$

11.6 ଉଚ୍ଚତା ଓ ଦୂରତା (Heights and distances) :

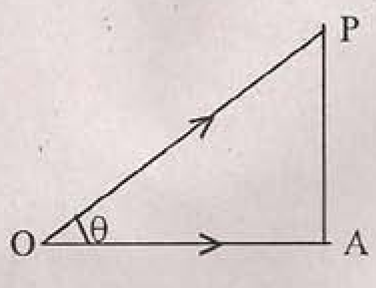
ଗଣିତ ପାଠକୁ ସୁଖପ୍ରଦ କରିବା ପାଇଁ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ ଦିଗ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରାଯିବା ଉଚିତ୍ । ପ୍ରତ୍ୟେକ୍ଷ ମାପ ନ କରି **ପଠାଣି ସାମନ୍ତ** ଏକ ନଳୀ ସାହାଯ୍ୟରେ ଶୀର୍ଷ ଦେଶକୁ ନିରୀକ୍ଷଣ କରି ପାହାଡ଼ର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ପାରୁଥିଲେ । ଏହା ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ ଗଣିତର ଏକ ନମୁନା । ଆସ ଆମେ ତ୍ରିକୋଣମିତିର ବାସ୍ତବ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପ୍ରୟୋଗ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

କେତେକ ସ୍ଥଳରେ ଯନ୍ତ୍ରୀମାନେ ପାହାଡ଼, ମନ୍ଦିର ପ୍ରଭୃତିର ଉଚ୍ଚତା ଏବଂ ନଦୀର ଦୁଇ ବିପରୀତ ଧାରରେ ଥିବା ବସ୍ତୁମାନଙ୍କର ଦୂରତା ମାପଫିତା ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରନ୍ତି ନାହିଁ । ତ୍ରିକୋଣମିତିର ପ୍ରୟୋଗରେ ଏପରି ସମସ୍ୟାର ସମାଧାନ କରାଯାଇପାରେ । ଉଚ୍ଚତା ଓ ଦୂରତା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ ପୂର୍ବରୁ ନିମ୍ନସ୍ଥ କେତୋଟି ତତ୍ତ୍ୱ ସହିତ ଅବଗତ ହେବା ଦରକାର ।

1. ପୃଥିବୀ ଏକ ଗୋଲାକାର ବସ୍ତୁ ହେଲେ ମଧ୍ୟ ଏହାର ବିଶାଳତା ହେତୁ ଏହାର ପୃଷ୍ଠର ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଅଂଶକୁ ଆମେ ଗୋଟିଏ ସମତଳ ବୋଲି ଧରିପାରିବା । ଏହି **ସମତଳ ସହିତ ସମାନ୍ତରାଳ ଯେ କୌଣସି ସରଳରେଖାକୁ ଆନୁଭୂମିକ** ସରଳରେଖା କୁହାଯାଏ ।

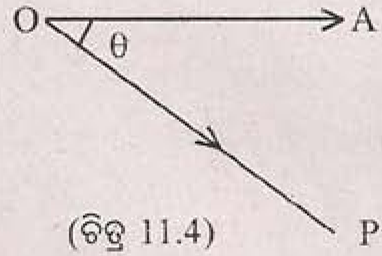
ଯଥା : ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\overleftrightarrow{OA}$ ଏକ ଆନୁଭୂମିକ ରେଖା ।

2. ଚିତ୍ରରେ O ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକ ଦର୍ଶକର ଚକ୍ଷୁ, ଅଧିକ ଉଚ୍ଚରେ ଥିବା ଏକ ବସ୍ତୁ P ଦିଗରେ ଦୃଷ୍ଟି ନିକ୍ଷେପ କରୁଥିବାର ଦେଖାଯାଉଛି । $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP}$ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଲମ୍ବ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକ ଆନୁଭୂମିକ ରଶ୍ମି । $\overrightarrow{OA}$ ଓ $\overrightarrow{OP}$ ରଶ୍ମିଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ P ବିନ୍ଦୁର **କୌଣିକ ଉନ୍ନତି (Angle of elevation)** ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ରରେ ଏହାର ପରିମାଣ θ ଅଟେ ।



(ଚିତ୍ର 11.3)

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ଚକ୍ଷୁର ଅବସ୍ଥିତି ଲକ୍ଷ୍ୟ କର । ଏଠାରେ ଦୃଷ୍ଟି ନିକ୍ଷେପର ଦିଗ $\overrightarrow{OP}$ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଲମ୍ବ ସମତଳରେ $\overrightarrow{OA}$ ଏକ ଆନୁଭୂମିକ ରଶ୍ମି । $\overrightarrow{OP}$ ଏବଂ $\overrightarrow{OA}$ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ P ବିନ୍ଦୁର **କୌଣିକ ଅବନତି (Angle of depression)** ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ରରେ ଏହାର ପରିମାଣ θ ଅଟେ ।

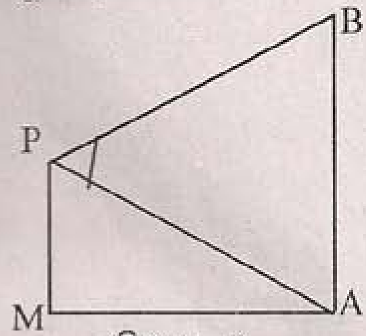


(ଚିତ୍ର 11.4)

ଦୃଷ୍ଟି ନିକ୍ଷେପର ଦିଗ ଓ ଏହାର ଲମ୍ବ ସମତଳରେ ଥିବା ଚକ୍ଷୁ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଆନୁଭୂମିକ ରଶ୍ମି ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣକୁ ଦୃଷ୍ଟିବଦ୍ଧ ବସ୍ତୁର କୌଣିକ ଉନ୍ନତି ବା କୌଣିକ ଅବନତି କୁହାଯାଏ । ସେକ୍‌ସ୍‌ଟାଣ୍ଟ (sextant) ବା ଥିଓଡୋଲାଇଟ୍ (Theodolite) ଯନ୍ତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ କୌଣିକ ଉନ୍ନତି ବା ଅବନତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରେ । ଏହି କୋଣର ମାପ ବ୍ୟବହାର କରି ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ପ୍ରଣାଳୀଦ୍ୱାରା ଦୂରରେ ଅବସ୍ଥିତ ଦୁର୍ଗ, ପାହାଡ଼ ଓ ଅଟ୍ଟାଳିକା ପ୍ରଭୃତିର ଦୂରତା ବା ଉଚ୍ଚତା ନିରୂପଣ କରିହେବ ।

କୌଣସି ବସ୍ତୁ ଏକ ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କୋଣ :

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\overline{PM}$ ଏକ ସ୍ତମ୍ଭ । $\overline{BA}$ ଏକ ମନ୍ଦିର । ମନ୍ଦିରର ପ୍ରାନ୍ତ ଓ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{PM}$ ସ୍ତମ୍ଭର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ P କୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ସହ ଯୋଗ କରାଯାଇଛି । $\overline{AB}$ ମନ୍ଦିରଟି P ବିନ୍ଦୁଠାରେ $\angle APB$ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବାର କୁହାଯାଏ ।



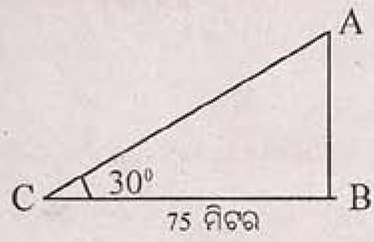
(ଚିତ୍ର 11.5)

ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଉଚ୍ଚତା ଓ ଦୂରତା ସମ୍ପର୍କିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ସମାଧାନ ସହଜରେ କରାଯାଇପାରେ । ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖ ।

ଉଦାହରଣ – 1 :

ଏକ ଅଟ୍ଟାଳିକାର ପାଦଦେଶଠାରୁ 75 ମିଟର ଦୂରରେ ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଟ୍ଟାଳିକାର ଶୀର୍ଷର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 30^0 । ଅଟ୍ଟାଳିକାର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\sqrt{3} = 1.732$)

ସମାଧାନ : $\overline{BC}$ ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ରେଖାଖଣ୍ଡ, BA ଅଟ୍ଟାଳିକାର ଉଚ୍ଚତା ଓ A ଅଟ୍ଟାଳିକାର ଶୀର୍ଷ ହେଉ ।



(ଚିତ୍ର 11.6)

ଏଠାରେ BC = 75 ମିଟର ଓ $m\angle BCA = 30^0$ ।

ABC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ

$\tan 30^0 = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{BA}{75}$ କିମ୍ବା $BA = 75 \tan 30$

$$= 75 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 75 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 25\sqrt{3} = 25 \times 1.732 = 43.3 \text{ ମିଟର}$$

$\therefore$ ଅଟ୍ଟାଳିକାର ଉଚ୍ଚତା 43.3 ମିଟର (ଉତ୍ତର)

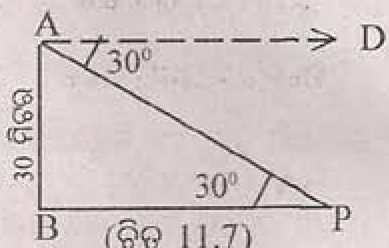
ଉଦାହରଣ – 2 :

30 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଗୋଟିଏ ବୃକ୍ଷର ଅଗ୍ରଭାଗରୁ ଏକ ସମତଳରେ ଓ ବୃକ୍ଷର ପାଦଦେଶରୁ କିଛି ଦୂରରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ 30^0 । ବୃକ୍ଷ ପାଦଦେଶରୁ ବିନ୍ଦୁର ଉକ୍ତ ଦୂରତା ସ୍ଥିର କର । (ଦତ୍ତ ଅଛି, $\sqrt{3}=1.732$)

ସମାଧାନ :

BA = ବୃକ୍ଷର ଉଚ୍ଚତା = 30 ମିଟର, $m\angle DAP=30^0$ ବୃକ୍ଷର ପାଦ ଦେଶ B ରୁ ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁଟି P, BP ଦୈର୍ଘ୍ୟଟି ଆବଶ୍ୟକ । ଏଠାରେ ABP ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle APB=30^0$

$$\therefore \tan 30^0 = \frac{AB}{BP} = \frac{30}{BP}$$



(ଚିତ୍ର 11.7)

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30}{BP}$$

$\therefore$ BP $= 30\sqrt{3}$ ମିଟର $= (30 \times 1.732)$ ମିଟର

$= 51.96$ ମିଟର (ଉତ୍ତର)

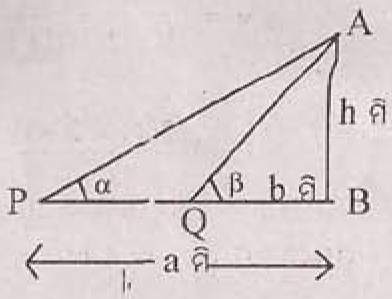
ଉଦାହରଣ – 3 :

ଏକ ସ୍ତମ୍ଭ $\overline{AB}$ ର ପାଦଦେଶ B ରୁ ଆନୁଭୂମିକ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ P ଓ Q ର B ଠାରୁ ଦୂରତା ଯଥାକ୍ରମେ a ମି ଓ b ମି । P ଓ Q, ସ୍ତମ୍ଭର ଶୀର୍ଷ A ର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ α^0 ଓ β^0 ।

ଯଦି $\alpha+\beta=90^0$ ତେବେ ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା AB ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର AB = h ମିଟର । ଦତ୍ତ ଅଛି BP = a ମି ଓ BQ = b ମି.,

$\angle APB=\alpha$, $\angle AQB=\beta$ ଏବଂ $\alpha+\beta=90^0$



(ଚିତ୍ର 11.8)

AQB ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $\tan\beta = \frac{AB}{BQ} = \frac{h}{b}$

APB ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $\tan\alpha = \frac{AB}{BP} = \frac{h}{a}$

ଆମେ ଜାଣୁ, $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha+\tan\beta} = \dfrac{\frac{h}{a}+\frac{h}{b}}{1-\frac{h^2}{ab}} = \dfrac{h(a+b)}{ab-h^2}$

$$\Rightarrow \cot(\alpha+\beta) = \frac{ab-h^2}{h(a+b)}$$

ମାତ୍ର $\cot(\alpha+\beta) = \cot 90^0 = 0$

$\therefore\ ab - h^2 = 0 \Rightarrow h = \sqrt{ab}$ ମି. । $AB = h$ ମି.$= \sqrt{ab}$ ମି. (ଉ)

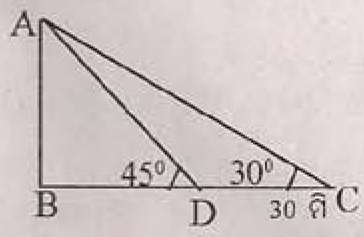
ଉଦାହରଣ – 4 :

ସୂର୍ଯ୍ୟର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 30^0 ଥିବା ବେଳେ ଗୋଟିଏ ସ୍ତମ୍ଭର ଛାଇର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯେତେ, ସୂର୍ଯ୍ୟର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 45^0 ବେଳେ ଛାଇର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ତା'ଠାରୁ 30 ମିଟର କମ୍ । ସ୍ତମ୍ଭଟିର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ($\sqrt{3}=1.732$)

ସମାଧାନ : ଚିତ୍ର 11.9 ରେ AB ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା,   BD ଓ BC ଯଥାକ୍ରମେ ସ୍ତମ୍ଭର ଛାଇ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯେତେବେଳେ

ସୂର୍ଯ୍ୟର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 45^0 ଓ 30^0 ଏବଂ $CD = BC - BD = 30$ ମିଟର ।

ମନେକର ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା $= AB = x$ ମିଟର



(ଚିତ୍ର 11.9)

BAD ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $\tan 45^0 = \dfrac{x}{BD}$

$\Rightarrow BD = \dfrac{x}{\tan 45^0} = \dfrac{x}{1} = x$

ଓ BAC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $\tan 30^0 = \dfrac{x}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{x}{\tan 30^0} = \dfrac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = x.\sqrt{3}$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $BC - BD = DC = 30$ ମି. $\Rightarrow x\sqrt{3} - x = 30$

$$\Rightarrow x = \frac{30}{\sqrt{3}-1} = \frac{30(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{30(\sqrt{3}+1)}{3-1}$$

$$= \frac{30(1.732+1)}{(3-1)} = \frac{30 \times 2.732}{2} = 15 \times 2.732 = 40.98$$ ମିଟର

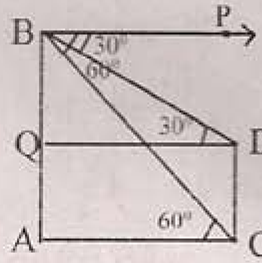
$\therefore$ ସ୍ତମ୍ଭଟିର ଉଚ୍ଚତା $= 40.98$ ମିଟର   (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 5 :

ଗୋଟିଏ ପାହାଡ଼ ଉପରୁ 100 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ସ୍ତମ୍ଭର ଶୀର୍ଷ ଓ ପାଦଦେଶର କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ 30^0 ଓ 60^0 । ପାହାଡ଼ର ଉଚ୍ଚତା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର AB = ପାହାଡ଼ର ଉଚ୍ଚତା ଓ CD ଏକ ସମତଳସ୍ଥ ସ୍ତମ୍ଭ ।

$\overleftrightarrow{BP}$ ଭୂପୃଷ୍ଠ ସହ ସମାନ୍ତର ରେଖା ହେଲେ $m\angle PBD = 30^0$ ଓ $m\angle PBC = 60^0$ ଓ $CD = 100$ ମିଟର ।



(ଚିତ୍ର 11.10)

ମନେକର ପାହାଡ଼ର ଉଚ୍ଚତା AB = x ମିଟର ଓ $\overline{DQ} \parallel \overline{BP} \parallel \overline{AC}$

$\therefore$ $m\angle BCA = 60^0$ ଓ $m\angle BDQ = 30^0$

$BQ = AB - AQ = AB - DC = (x-100)$ ମି.

BQD ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $\tan 30^0 = \frac{BQ}{QD}$

$$\Rightarrow QD = \frac{BQ}{\tan 30^0} \Rightarrow QD = \frac{x-100}{\tan 30^0} \qquad \text{........(i)}$$

BAC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $\tan 60^0 = \frac{AB}{AC}$

$$\Rightarrow AC = \frac{AC}{\tan 60^0} \Rightarrow AC = \frac{x}{\tan 60^0} \qquad \text{........(ii)}$$

ମାତ୍ର QD = AC $\therefore$ (i) ଓ (ii) ରୁ $\frac{x-100}{\tan 30^0} = \frac{x}{\tan 60^0}$

$$\Rightarrow \frac{x-100}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}(x-100) = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 3(x-100) = x \Rightarrow 3x - 300 = x$$

$$\Rightarrow 3x - x = 300 \Rightarrow 2x = 300 \Rightarrow x = 150$$

$\therefore$ ପାହାଡ଼ର ଉଚ୍ଚତା 150 ମିଟର ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 11 (c)

କ - ବିଭାଗ

($\sqrt{3} = 1.732$)

1. ଗୋଟିଏ ବୃକ୍ଷର ପାଦଦେଶ ସହ ଏକ ସମତଳରେ ଏବଂ ଏହାଠାରୁ 120 ମି. ଦୂରରେ ଅବସ୍ଥିତ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ବୃକ୍ଷର ଅଗ୍ରଭାଗର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 30^0 ହେଲେ ବୃକ୍ଷର ଉଚ୍ଚତା ସ୍ଥିର କର ।

2. 27 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଏକ ବତୀଘରର ଶୀର୍ଷରୁ ଏକ ଜାହାଜର କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ 30^0 । ବତୀଘରଠାରୁ ଜାହାଜର ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. 2 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଏକ ଦର୍ଶକ ଦେଖିଲା ଯେ, 24 ମିଟର ଦୂରରେ ଥିବା ଏକ ସ୍ତମ୍ଭର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 30^0 । ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଏକ ସିଡ଼ି ଏକ କାନ୍ଥର ଶୀର୍ଷକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି । ସିଡ଼ିର ପାଦ ଦେଶରୁ କାନ୍ଥର ଦୂରତା 3 ମିଟର । ସିଡ଼ିଟି ଭୂମି ସହ 60^0 ରେ ଆନତ । ସିଡ଼ିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।

5. 1.5 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଜଣେ ଦର୍ଶକ ଏକ କୋଠାଘରଠାରୁ 12 ମିଟର ଦୂରସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଦେଖିଲା ଯେ, କୋଠାଘରର ଶୀର୍ଷର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 60^0 । କୋଠାଘରର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ସୂର୍ଯ୍ୟର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 60^0 ବେଳେ ଗୋଟିଏ ଗଛର ଛାଇର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 15 ମିଟର ଥିଲା । ଗଛର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଖ - ବିଭାଗ

7. 300 ମିଟର୍ ଉଚ୍ଚ ଏକ ପାହାଡ଼ ଉପରୁ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଗୋଟିଏ ସ୍ତମ୍ଭର ଶୀର୍ଷ ଓ ପାଦଦେଶର କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ 30^0 ଓ 60^0 ହେଲେ ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. ସୂର୍ଯ୍ୟର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 60^0 ରୁ 45^0 କୁ ହ୍ରାସ ପାଇଥିବାରୁ ଏକ ସ୍ତମ୍ଭର ଛାଇର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 24 ମିଟର ବୃଦ୍ଧି ପାଇଲା । ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

9. ଏକ ସମତଳ ଭୂମି ଉପରେ 40 ମିଟର ବ୍ୟବଧାନରେ ଦୁଇଟି ଖୁଣ୍ଟ ଲମ୍ବ ଭାବରେ ପୋତା ଯାଇଛି । ଗୋଟିଏ ଖୁଣ୍ଟର ଉଚ୍ଚତା ଅନ୍ୟ ଖୁଣ୍ଟର ଉଚ୍ଚତାର ଦୁଇଗୁଣ । ଖୁଣ୍ଟଦ୍ୱୟ ସେମାନଙ୍କ ପାଦବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁରେ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରନ୍ତି, ସେମାନେ ପରସ୍ପର ଅନୁପୂରକ । ଖୁଣ୍ଟ ଦ୍ୱୟର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ଗୋଟିଏ ଗଛର ଶୀର୍ଷରୁ ଭୂମି ଉପରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ବସ୍ତୁର କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ 60^0 ଥିଲା । ସେହି ଗଛର ଶୀର୍ଷରୁ 1.5 ମିଟର ତଳକୁ ଓହ୍ଲାଇ ଆସିଲେ ଉକ୍ତ ବସ୍ତୁରେ କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ 30^0 ହୁଏ । ଗଛର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

11. 10 ମିଟର ଉଚ୍ଚ ଏକ ସ୍ତମ୍ଭର ଅଗ୍ରଭାଗରୁ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଗୋଟିଏ ମନ୍ଦିରର ଶୀର୍ଷର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ ଓ ପାଦଦେଶର କୌଣିକ ଅବନତିର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ 45^0 ଓ 30^0 ହୋଇଯାଏ । ଗଛର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. 12 ମିଟର ପ୍ରସ୍ଥ ଏକ ରାସ୍ତାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ଏକ କୋଠାଘର, ଏହାର ଅପର ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ଅନ୍ୟ ଏକ ଘରର ଝରକାରେ ଏକ ସମକୋଣ ଅଙ୍କନ କରେ । କୋଠାଘରର ପାଦଦେଶରେ ଝରକାର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 30^0 ହେଲେ କୋଠାଘରର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

13. ଜଣେ ଲୋକ ଗୋଟିଏ ନଦୀ କୂଳରେ ଠିଆ ହୋଇ ଦେଖିଲା ଯେ ନଦୀର ଅପର ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଭୂମିରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ଦୁର୍ଗର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 60^0 । ଦୁର୍ଗ ସହିତ ଏକ ସରଳରେଖାରେ 60 ମିଟର ପଛକୁ ଘୁଞ୍ଚି ଆସି ଦେଖିଲା ଯେ, ଉକ୍ତ କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ 45^0 ହେଲା । ନଦୀର ପ୍ରସ୍ଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

14. ଦୁଇଟି ସ୍ତମ୍ଭ ପରସ୍ପରଠାରୁ 12 ମିଟର ଦୂରରେ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଗୋଟିକର ଉଚ୍ଚତା ଅନ୍ୟଟିର ଦୁଇଗୁଣ । ସ୍ତମ୍ଭଦ୍ୱୟର ପାଦବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁରୁ ଦେଖିଲେ ସ୍ତମ୍ଭଦ୍ୱୟର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର କୌଣିକ ଉନ୍ନତି ପରସ୍ପର ଅନୁପୂରକ ହୁଏ, ସ୍ତମ୍ଭଦ୍ୱୟର ଉଚ୍ଚତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

15. ଗୋଟିଏ ଦୁର୍ଗର ପାଦ ଦେଶ ସହ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରୁ ଦୁର୍ଗର ଶୀର୍ଷ ଭାଗର କୌଣିକ ଉନ୍ନତିର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ 30^0 ଓ 45^0 । ଦୁର୍ଗର ଉଚ୍ଚତା 30 ମିଟର ହେଲେ, ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନ କେତେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

16. ଗୋଟିଏ କୋଠାର ଉଚ୍ଚତା 12 ମିଟର । କୋଠାର ଶୀର୍ଷରୁ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକ ସ୍ତମ୍ଭର ଶୀର୍ଷ ଓ ପାଦଦେଶର କୌଣିକ ଉନ୍ନତି ଓ ଅବନତିର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ 60^0 ଓ 30^0 । ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା ଓ ବୃକ୍ଷଠାରୁ ସ୍ତମ୍ଭର ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।